



SOLUTION

D'UNE

QUESTION CURIEUSE QUI NE PAROIT

SOUmise À AUCUNE ANALYSE,

PAR M. EULER.

I.

Je me trouvai un jour dans une compagnie, où, à l'occasion du jeu d'échecs quelqu'un proposa cette question: *de parcourir avec un cavalier toutes les cases d'un échiquier, sans parvenir jamais deux fois à la même, & en commençant par une case donnée.* On mettoit pour cette fin des jettons sur toutes les 64 cases de l'échiquier, à l'exception de celle où le Cavalier devoit commencer sa route; & de chaque case où le Cavalier passoit conformément à sa marche, on ôtoit le jetton, de sorte qu'il s'agissoit d'enlever de cette façon successivement tous les jettons. Il falloit donc éviter d'un côté, que le cavalier ne revint jamais à une case vuide, & d'un autre côté il falloit diriger en sorte sa course, qu'il parcourut enfin toutes les cases.

2. Ceux qui croyoient cette question assez aisée firent plusieurs essais inutiles sans pouvoir atteindre au but; après quoi celui qui avoit proposé la question, ayant commencé par une case donnée, a su si bien diriger la route, qu'il a heureusement enlevé tous les jettons. Cependant la multitude des cases ne permettoit pas qu'on ait pu imprimer à la mémoire la route qu'il avoit suivie; & ce n'étoit qu'après plusieurs essais, que j'ai enfin rencontré une telle route, qui satisfait à la question; encore ne valoit-elle que pour une certaine case initiale. Je ne me souviens plus, si on lui a laissé la liberté de la choisir lui-même; mais il a très positivement assuré qu'il étoit en état de l'exécuter, quelle que soit la case où l'on voulut qu'il commençât.

3.



3. Pour éclaircir mieux cette question, j'ajouterai ici une route, où, en commençant par un coin de l'échiquier, on parcourt toutes les cases :

42	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
12	45	60	55	22	57	6	47
53	62	11	30	25	18	19	38
32	13	54	27	56	23	48	5
63	52	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	64	15	34	3	50	17	36

J'ai marqué ici les cases par l'ordre des nombres, suivant lequel elles sont successivement parcourues. Ainsi le cavalier ayant été posé dans la case 1 saute en 2, de là en 3, & depuis en 4, 5, 6, &c. jusqu'à ce que venant enfin dans la case 64 il aura passé toutes les cases. Il est évident, que cette route satisfait également, quand on veut commencer par quelqu'un des autres angles.

4. En retournant par la même route on pourra aussi commencer par la case 64, & de là en passant successivement par les cases 63, 62, 61, &c. on parviendra enfin, après avoir parcouru toutes les cases, à celle du coin 1. Mais cette route ne servira de rien, quand on doit commencer par quelque autre case : & alors on sera obligé de chercher par des essais une nouvelle route, dont le commencement soit dans la case donnée. Or on reconnoitra aisément, qu'une telle solution du problème proposé seroit trop pénible, & ne conviendrait pas au but en vue ; ou il s'agit de trouver promptement la route, qu'il faut suivre. D'ailleurs une telle recherche ne mérite aucune attention, à moins qu'elle ne soit fondée sur quelques principes ; ou qu'on ne la puisse soumettre à quelque espèce d'Analyse, qui en dirige les opérations.

Ce n'est aussi que dans cette vue que j'ose proposer mes recherches sur cette question : auxquelles j'ai été conduit par une idée
 tou-



toute particulière, que Mr. Bertrand de Geneve m'a fournie; car, quoi-qu'elle soit legere en elle-même, & tout à fait étrangere à la Géométrie, elle doit être regardée comme très remarquable, dès qu'on aura trouvé moyen d'y appliquer l'Analyse. Or je ferai voir qu'elle est susceptible d'une analyse tout particulière, qui doit mériter d'autant plus d'attention, que cette analyse demande des raisonnemens peu usités ailleurs. On convient aisément de l'excellence de l'Analyse, mais on la croit communément bornée à de certaines recherches, qu'on rapporte aux Mathématiques; & partant il sera toujours fort important d'en faire usage dans des matieres qui lui semblent refuser tout accès: puisqu'il est certain qu'elle renferme l'art de raisonner dans le plus haut degré. On ne sauroit donc étendre les bornes de l'Analyse, sans qu'on ait raison de s'en promettre de très grands avantages.

6. Or d'abord je remarque, qu'on pourroit satisfaire à la question, si l'on trouvoit une telle route, où la dernière case marquée par 64 seroit éloignée de la première 1 d'un saut de cavalier, de sorte qu'il pourroit sauter de la dernière sur la première. Car, ayant trouvé une telle route rentrante en elle-même, on pourra commencer par quelque case que ce soit, & de là continuer la course suivant l'ordre des nombres jusqu'à la case marquée par 64, d'où, en sautant à celle qui est marquée par 1, il acheveroit la course jusqu'à retourner à celle d'où il étoit parti. Or voilà une telle route rentrante en elle-même,

42	57	44	9	40	21	46	7
55	10	41	58	45	8	39	20
12	43	56	61	22	59	6	47
63	54	11	30	25	28	19	38
32	13	62	27	60	23	48	5
53	64	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	52	15	34	3	50	17	36

7. Ayant donc bien imprimé à la mémoire une telle route, on fera en état de satisfaire à la question en commençant par une case quelconque. Car, soit par exemple la case marquée par 25, d'où le cavalier doit partir, & on n'aura qu'à le faire marcher successivement par les cases 26, 27, 28 jusqu'à 64, d'où passant à la case 1, il poursuivra sa route par les cases 2, 3, 4, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à celle qui est marquée par 24: & ainsi il aura parcouru toutes les cases de l'échiquier. J'indiquerai cette route en représentant les nombres qui marquent les cases, en sorte

25 64. 1 24,

& il est évident qu'on réussira également en commençant par toute autre case: ainsi cette disposition

46 64. 1 45

servira, quand on doit commencer par la case 46.

8. Il est aussi évident que la même disposition fournit, pour chaque case où l'on doit commencer, une double route: puisqu'on peut également passer de la case marquée contre l'ordre des nombres jusqu'à celle qui contient 1, & de là sautant en 64 continuer la course par les cases 63, 62, 61, &c. jusqu'à ce qu'on parvienne à celle où l'on a commencé. Que le nombre 40 indique la case d'où il faut partir, & on aura ces deux routes à poursuivre:

40. 41 64. 1. 2 39,

& 40. 39 1. 64. 63 41,

où la première finit par la case 39, & l'autre par 41. Toute autre disposition rentrante en elle-même fournira les mêmes avantages, & il suffit d'en savoir une seule par-cœur: mais on comprendra aisément, que ce seroit un ouvrage extrêmement embarrassant, que de trouver en tâtonnant par plusieurs essais une telle disposition, & qu'on risqueroit de n'y réussir peut-être jamais.

9. Je m'en vais donc expliquer une méthode certaine, qui nous conduira infailliblement au but proposé, & par le moyen de laquelle on sera en état de découvrir autant de routes satisfaisantes qu'on voudra: car, quoique le nombre de ces routes ne soit pas infini, il sera toujours si grand, qu'on ne le sauroit jamais épuiser. Mais il faut ici distinguer deux especes de routes, l'une qui parcourt simplement routes les cases de l'échiquier sans que le cavalier puisse sauter de la dernière à la première; l'autre espece est celle des routes rentrantes en elles mêmes, où le cavalier, après avoir parcouru toutes les cases, peut sauter de la dernière à la première. J'ai donné un exemple de la première espece dans le §. 3. & un de la seconde dans le §. 6. l'on peut regarder l'un & l'autre comme trouvé par hazard en tâtonnant; mais la méthode que j'expliquerai, servira à en trouver autant qu'on voudra, tant de l'une que de l'autre espece.

10. Comme il est beaucoup plus difficile de trouver par les seuls essais une route de la seconde espece, je commencerai par donner une méthode, par le moyen de laquelle on pourra, après avoir trouvé une route de la première espece, en découvrir non seulement une, mais plusieurs de la seconde espece. Pour cet effet, je remarque d'abord qu'on peut en plusieurs manieres changer la dernière case, celle du commencement demeurant la même. Considérons la route rapportée §. 3. & qu'on marque les cases auxquelles le cavalier pourroit passer de la dernière marquée par 64; or on verra que ces cases sont 63, 31, & 51; dont la première, qui renferme le saut déjà employé à 64, n'est d'aucun usage. Mais, puisqu'on peut passer de la case 31 à la case 64, qu'on fasse ce saut après être parvenu de la case 1 par les cases 2, 3, 4, &c. à celle de 31, & depuis qu'on poursuive la route par les cases 64, 63, 62, &c. jusqu'à ce qu'on parvienne à la case 32 qui sera à présent la dernière: cette nouvelle route, sera représentée en sorte

1. 2 31. 64. 63. 32.

11. De même, le saut de 64 à 51 nous donne à connoître, qu'on peut passer de la case 51 à 64: & de là en poursuivant la route par les cases 63, 62, &c. la dernière sera celle qui est marquée par 52: cette route entière sera donc représentée en sorte:

1. 2 51. 64. 63 52.

Maintenant, puisque cette dernière case 52 fournit un saut à la première, cette route se rapporte à la seconde espèce, & est rentrante en elle-même: & c'est précisément la route décrite au §. 6. Quand on ne seroit pas encore parvenu à une route rentrante, on pourroit de nouveau transformer celle que nous venons de trouver au §. précédent:

1 31. 64 32.

où la dernière étant 32, le cavalier en peut sauter aux cases 43, 11, 31, 33, ainsi on n'aura qu'à renverser la partie de cette route comprise entre l'un de ces nombres & le dernier 32.

12. Le nombre 43 fournira donc cette nouvelle route

1 31. 64 43. 32 42.

où la case angulaire 43 est la dernière. Le second nombre 11 donnera cette route:

1 11. 32 64. 31 12,

où la case marquée de 12 est à présent la dernière. Le troisième nombre 31 rend la route principale, d'où nous avons tiré ces nouvelles savoir

1 31. 32 64,

& le quatrième nombre 33 ne change rien dans la route que nous traitons. La route précédente, qui finissoit par 12, puisque le cavalier peut sauter de 12 à ces cases 59, 41, 11, & 13, fournira ces transformées.

1 11. 33 59. 12 31. 64 61,

1 11. 32 41. 12 31. 64 42,

& celle-là, puisque 60 conduit aux causes 61, 59, 9, 45, 25, 27, 13, & 53, nous mènera à plusieurs nouvelles routes, où les dernières cases seront 10, 46, 26, 28, 14, & 54.

13. Voilà donc une source bien riche, d'où l'on peut puiser quantité de nouvelles routes, en ayant une fois trouvé une seule : & le nombre des transformations devient encore plus grand, quand on renverse l'ordre de la première route en sorte

64 1,

où la dernière case tenant à 52 fournit cette transformée

64 52. 1 51

& puisque 51 donne un saut à 64, cette route est rentrante en elle-même, mais elle n'est que la renversée de celle de dessus. Or 51 étant lié avec 64, 52, 54, 56, 26, & 50, fournit ces transformées

64 54. 51 1. 52. 53

64 56. 51 1. 52 . . 55

64 52. 1 26. 51 . . . 27,

& de celles-ci, si l'on veut, on peut encore trouver quantité d'autres : parmi lesquelles on ne manquera pas d'en découvrir qui sont rentrantes en elles-mêmes.

14. Or, en ayant déjà trouvé une, qui est rentrante en elle-même, comme est celle du §. 6. il n'est pas difficile d'en tirer plusieurs autres de même nature : on n'a qu'à arranger les cases en sorte que, tant la première que la dernière, se trouve éloignée des bandes, puisqu'alors l'une & l'autre permet 8 sauts. Ainsi, si nous rangeons les nombres de la route §. 6. en sorte

31 64. 1 30,

la dernière case 30 étant jointe à celles-ci: 45, 59, 23, 29, 31, 13, 43, 41, fournit ces transformées

I.	31	45.	30	1.	64	46,
II.	31	59.	30	1.	64	60,
III.	31	64.	1	23.	30	24,
IV.	31	64.	1	13.	30	14,
V.	31	43.	30	1.	64	44,
VI.	31	41.	30	1.	64	42,

où la II. & la IV. sont rentrantes en elles-mêmes: & tant de celles-ci que des autres on pourra trouver par des transformations ultérieures plusieurs autres. Comme la III donne

31	64.	1	.	.	.	13.	24	.	.	.	30.	23	.	.	14
31.	.	33.	24	.	.	30.	23	.	.	.	1.	64	.	.	.	34	.	.	.
31	64.	1	.	.	.	15.	24	.	.	.	30.	23	.	.	16

15. Mais, quand on n'a pas encore une route de la première espèce, voyons comment il faut s'y prendre pour en trouver une sans se livrer au seul hazard. En commençant par une case quelconque, qu'on continue à volonté les sauts du cavalier aussi loin qu'on pourra, & qu'on mette dans les cases qui sont restées vuides, des lettres qui leur servent de signe, comme dans cette figure:

34	21	54	9	32	15	48	7
55	10	33	20	13	8	31	18
22	75	62	7	40	49	6	47
11	56	41	50	59	52	17	30
36	23	58	61	42	39	46	5
57	12	25	38	51	60	29	16
24	17	2	43	14	27	4	45
1	6	13	26	3	44	15	28

Ici j'ai pu continuer la route jusqu'à la case marquée par 62, & dans les lettres *a* & *b*.

16. Maintenant, ayant 62 cases parcourues par le cavalier, je les représente de cette manière

1 62,

& regardant la case 62 comme la dernière, je cherche des transformées, qui finissent par d'autres cases, d'où il y ait un passage sur l'une des cases *a* ou *b*. Or la case 62 communique avec celles-ci 9, 53, 59, 61, 23, 11, 55, & 21, d'où nous tirons ces transformées:

- I. 1 9. 62 10, d'où l'on passe en *a*
- II. 1 53. 62 . . . 54, d'où l'on passe en *a*
- III. 1 59. 62 . . 60
- IV. 1 23. 62 24
- V. 1 11. 62 12
- VI. 1 55. 62 56, d'où l'on passe en *a*
- VII. 1 21. 62 22.

Donc les routes I, II, & VI, s'étendent déjà jusqu'à la case *a*, & il n'y reste plus vuide que la seule case *b*, & pour la lier avec les autres on n'a qu'à transformer une de ces trois routes par la même méthode. On opéreroit semblablement s'il étoit resté plusieurs cases vuides.

17. Prenons la première transformée

1 9. 62 10. *a*,

dont la dernière case *a* conduit à 32, 8, 52, 42, 58, 56, 10, & 54, parmi lesquelles 58 fournit cette transformée

1 9. 62 58. *a*. 10 57

dont la dernière 57 conduit à la case *b*, de sorte qu'à présent le cavalier aura parcouru toutes les cases, ayant commencé sa course en 1, & fini en *b*.

1 9. 62 58. *a*. 10 57. *b*.
Mais

Mais cette route n'est pas rentrante en elle-même. Pour lui procurer cet avantage, cherchons de nouvelles transformées, la dernière *b* conduisant à ces cases: 57, 25, 43: dont 25 donne cette transformée

1 9. 62 58. *a*. 10 25. *b*. 57 26,
où la dernière conduit à 37, 25, & 51, & 27. Or aucune ne fournit une route de la seconde espèce. Prenons donc 43.

1 9. 62 58. *a*. 10 43. *b* 57 44,
dont la dernière 44 conduit à 43, 51, 29, & 45: dont aucune ne donne immédiatement une route rentrante en elle-même.

18. Il faudra donc passer à de nouvelles transformées, & pour que cela se puisse faire plus aisément, il sera bon de présenter la route trouvée de la première espèce par l'ordre naturel des nombres.

40	27	60	9	38	25	54	7
61	16	39	26	59	8	37	24
28	41	10	15	46	55	6	53
17	62	47	56	13	58	23	36
42	29	14	11	48	45	52	5
63	18	31	44	57	12	35	22
30	43	2	49	20	33	4	51
1	64	19	32	3	50	21	34

où la route étant représentée en forte

1 64,

& la dernière 64 conduisant à 63, 31, 49, on aura deux transformées:

I. 1 31. 64 32,

II. 1 49. 64 50,

car la case 63 ne change rien dans la proposée.

19. Puisqu'il n'y a que deux cases qui aboutissent à la première 1, renversons ces deux transformées pour avoir :

I. 32 64. 31 1,

II. 50 64. 49 1,

& maintenant, la dernière 1 conduisant à 2 & 18, nous en tirons ces deux nouvelles :

A. 32 64. 31 18. 1 17,

B. 50 64. 49 18. 1 17,

où la dernière 17 conduisant à 16, 10, 14, 18, nous obtiendrons

C. 32 64. 31 18. 1 10. 17 11,

D. 50 64. 49 18. 1 10. 17 11,

E. 32 64. 31 18. 1 14. 17 15,

F. 50 64. 49 18. 1 14. 17 15.

La dernière 11 conduit à 46, 58, 12, 20, 2, 18, 62, 10, & donne

G. 32 . . . 46. 11 . . . 17. 10 . . . 1. 18 . . 31. 64 . . . 47,

H. 50 . . . 64. 49 . . . 46. 11 . . . 17. 10 . . . 1. 18 . . . 45,

I. 32 . . . 58. 11 . . . 17. 10 . . . 1. 18 . . 31. 64 . . . 59,

K. 50 . . . 58. 11 . . . 17. 10 . . . 1. 18 . . 49. 64 . . . 59,

L. 32 . . . 64. 31 . . . 20. 11 . . 17. 10 . . . 1. 18. 19,

M. 50 . . 64. 49 . . 20. 11 . . 17. 10 . . . 1. 18. 19,

N. 32 . . . 64. 31 . . 18. 1. 2. 11 . . . 17. 10 . . 3,

O. 50 . . . 64. 49 . . 18. 1. 2. 11 . . . 17. 10 . . 3,

P. 32 . . . 62. 11 . . . 17. 10 . . . 1. 18 . . 31. 64. 63,

Q. 50 . . . 62. 11 . . . 17. 10 . . . 1. 18 . . 49. 64. 63.



20. Or E & F dont la dernière 15 conduit à 33, 8, 58, 48, 14, 62, 16, 60, donneront ces transformées :

<i>g.</i>	32 . .	38. 15 . . .	17. 14 . . .	1. 18 . . .	31. 64 . .	39,
<i>h.</i>	50 . .	64. 49 . . .	38. 15 . .	17. 14 . . .	1. 18 . . .	37,
<i>i.</i>	32 . .	64. 31 . . .	18. 1 . . .	8. 15 . . .	17. 14 . .	9,
<i>k.</i>	50 . .	64. 49 . . .	18. 1 . . .	8. 15 . . .	17. 14 . .	9,
<i>l.</i>	32 . .	58. 15 . . .	17. 14 . . .	1. 18 . . .	31. 64 . .	59,
<i>m.</i>	50 . .	58. 15 . . .	17. 14 . . .	1. 18 . . .	49. 64 . .	59,
<i>n.</i>	32 . .	48. 15 . . .	17. 14 . . .	1. 18 . . .	31. 64 . .	49,
<i>o.</i>	50 . .	64. 49. 48. 15 . .	17. 14 . .	1. 18		47,
<i>p.</i>	32 . .	62. 15 . . .	17. 14 . . .	1. 18 . . .	31. 64. 63,	
<i>q.</i>	50 . .	62. 15 . . .	17. 14 . . .	1. 18 . . .	49. 64. 63,	
<i>r.</i>	32 . .	60. 15 . . .	17. 14 . . .	1. 18 . . .	31. 64 . .	61,
<i>s.</i>	50 . .	60. 15 . . .	17. 14 . . .	1. 18 . . .	49. 64 . .	61,

Mais, parmi toutes ces transformées, il ne s'en trouve pas encore une qui soit rentrante en elle même, mais leurs transformées ultérieures en fourniront assez.

21. Prenons la route indiquée par la lettre G, où la dernière case 47 communiquant avec celles-ci: 26, 46, 48, 44, 18, 42, 28, 16, les dernières cases qu'on aura par ces transformations, seront: 27, 11, 47, 45, 19, 43, 29, 17, dont 43 communique avec la première 32, & donne par conséquent cette route rentrante,

32 . . 42. 47 . . 64. 31 . . 18. 1 . . 10. 17 . . 11. 46 . . 43,

laquelle pourra donc être représentée en forte

1 . . 10. 17 . . 11. 46 . . 43. 32 . . 42. 47 . . 64. 31 . . 18,



& marquant les cases par l'ordre naturel des nombres, on aura cette route rentrante.

30	55	46	9	28	57	40	7
47	12	29	56	45	8	27	58
54	31	10	13	18	41	6	39
11	48	33	42	15	44	59	26
32	53	14	17	34	19	38	5
49	64	51	20	43	16	35	60
52	21	2	35	62	23	4	37
1	50	63	22	3	36	61	24

22. La route indiquée par la lettre H ayant 45 pour sa dernière case, les cases

communicantes sont: 6, 36, 21, 4, 20, 44, 56, 46,

& les dernières seront: 5, 37, 23, 3, 21, 45, 57, 11,

où 57 communique avec la première 30, d'où résulte cette route rentrante.

30 . 56.45 . . 18.1 . . 10.17 . . 11.46 . . 49.64 . . 57
qui pourra aussi être représentée en sorte:

1 . . 10.17 . . 11.46 . . 49.64 . . 57.30 . . 56.45 . . 18,

42	55	26	9	14	17	34	7
25	2	43	56	27	8	45	58
54	41	10	13	18	35	6	39
11	24	19	36	15	28	59	26
32	53	14	17	20	37	32	5
23	64	51	38	29	16	47	60
52	39	2	21	62	42	4	37
1	22	63	50	3	30	61	24

qui ne diffère pas beaucoup de la précédente.

23. Les routes indiquées par I & K ayant la dernière case 59, on aura

les cases communicantes: 54, 6, 58, 55, 10, 60,

les dernières pour I seront: 55, 5, 11, 57, 9, 59,

or les dernières pour K: 55, 5, 11, 57, 9, 59,

d'où nous tirons encore deux rentrantes, puisque 57 communique tant avec 32 que 50: savoir

32 . . 56. 59 . . 64. 31 . . 18. 1 . . 10. 17 . . 11. 58. 57,

50 . . 56. 59 . . 64. 49 . . 18. . . . 10. 17 . . 11. 58. 57,

qui pourront être représentées en sorte:

1 . . 10. 17 . . 11. 58. 57. 32 . . 56. 59 . . 64. 31 . . 18,

1 . . 10. 17 . . 11. 58. 57. 50 . . 56. 59 . . 64. 49 . . 18,

De même, les routes L & M finissant par 19, on aura

les cases communicantes avec 19 - - - 30. 18. 44. 20,

de la les dernières pour L - - - 29. 19. 45. 11,

- - - - - pour M - - - 29. 19. 43. 11,

où il n'y a aucune rentrante. Les routes N & O finissant par 3, on aura par rapport à cette dernière:

les cases communicantes - - - 2, 44, 12, 4,

alors la dernière devient pour N - - 11, 45, 13, 3,

- - - - - pour O - - 11, 43, 15, 3,

où il n'y en a point non plus.

24. S'il valoit la peine, on pourroit, en poursuivant ces transformations, trouver plusieurs autres routes rentrantes en elles-mêmes, & on ne manqueroit pas de découvrir des moyens pour abréger les opérations, en achevant deux ou plusieurs à la fois, afin qu'on arrive plutôt au but proposé. Aussi n'est-ce pas mon dessein d'assigner toutes

res les routes possibles, qui soient rentrantes en elles-mêmes, ce qui seroit un ouvrage aussi pénible qu'inutile; & je me contente d'avoir donné une méthode sûre pour trouver autant de routes qu'on voudra, méthode dont l'application n'est pas difficile en chaque cas. Mais on peut ajouter à la question principale encore des conditions, qui la rendent plus curieuse, comme si l'on exigeoit, que les nombres qui se trouvent dans des cases opposées aient la même différence, qui doit être 32 comme la moitié du nombre de toutes les cases. Or chaque case en a une, qui lui est opposée, de sorte que la ligne droite tirée par les centres de ces deux cases divise le quarré en deux parties égales. On demande donc que les nombres 33, 34, 35, 36 . . . 64, se trouvent à l'opposite des nombres 1, 2, 3, 4 . . . 32.

25. Pour trouver de telles routes diagonales, on n'a qu'à commencer par écrire les nombres 1, 2, 3, 4, &c. conformément à la marche du cavalier, & à mesure qu'on écrit ces nombres, mettre les nombres 33, 34, 35, 36, &c. dans les cases opposées, & pour suivre cet arrangement, tant qu'on pourra: comme on peut le voir par la figure ci jointe

10	29	48	35	8	31	46	33
49	36	9	30	47	34	7	58
28	11	A	C	f	45	32	19
37	50	B	D	e	6	59	44
12	27	38	E	d	b	18	5
51	64	13	F	c	a	43	60
26	39	2	15	62	41	4	17
1	14	63	40	3	16	61	42

Ici j'ai pu continuer la suite des nombres 1, 2, 3, jusqu'à 19, & celle des nombres 33, 34, 35, jusqu'à 51. Mais en rétrogradant je suis passé de 1 par 64, 63 jusqu'à 58, & de 33 j'ai pu reculer jusqu'à 26. Douze cases sont restées vuides que j'ai remplies des lettres A, a, B, b, C, c, D, d, E, e, F, f, disposées par des cases opposées.



26. Nous avons donc deux séries séparées de cases, qui se suivent selon la marche du cavalier :

58 64. 1 19,
29 51.

La case 19 aboutissant à 6, nous aurons les transformées, qui pourront être continuées plus loin :

58 64. 1 6. 19 7, *f*, B, *d*, C,
26 38. 51 39, F, *b*, D, *c*,

Maintenant, la case C communiquant aux cases de la première suite, 8, 6, *d*, ne fournit pas de nouvelles transformations. Mais retranchons les deux dernières, & puisqu'il suffit de transformer une seule suite, parce que l'autre en est déterminée, prenons la première

58 64. 1 6. 19 7, *f*, B,

où B aboutissant à 12 donne cette transformée à continuer

58 64. 1 6. 19 12. B. *f*. 7 11. D. . .

Or *c* étant communicable à 16, on aura

58 . . 64. 1 . . 6. 19 . . 16. *c*. D. 11 . . 7. *f*. B. 12 . . 15. *a*. E,

& l'autre suite sera

26 38. 51 . . 48. C. *d*. 43 . . 39. F. *b*. 44 . . 47. A. *e*,

où toutes les cases sont comprises.

37. Maintenant il faut lier ces deux suites ensemble, en sorte que la fin de l'une aboutisse au commencement de l'autre. Pour cet effet transformons la première dont la fin F communique avec la case 62, & la fin devenant alors 63 sera cohérente avec le commencement de l'autre 26. Cette transformation donne donc :

58 . . 62. E. *a*. 15 . . 12. B. *f*. 7 . . 11. D. 16 . . 19. 6 . . 1. 64 . . 63
26 . . 30. *c*. A. 47 . . 44. *b* F. 39 . . 43. *d* C. 48 . 51. 38 31



& on a en même tems une route rentrante en elle-même, & douée de la condition prescrite :

14	59	42	35	16	31	54	33
41	36	15	58	55	34	17	30
60	13	56	43	18	53	32	7
37	40	19	12	57	6	29	52
20	61	38	25	44	51	8	5
39	64	21	50	11	24	45	28
62	49	2	23	26	47	4	9
1	22	63	48	3	10	27	46

28 Ayant trouvé une seule route de cette nature, il est aisé de la transformer en plusieurs manieres différentes en lui conservant la même propriété. Car, de quelque maniere qu'on partage la suite rentrante des nombres 1 64 en deux moitiés, l'une contient toujours les cases opposées de l'autre; comme on peut voir par ces bisections :

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & . & . & . & 32 & 2 & . & . & . & 33 & 3 & . & . & . & 34 & 4 & . & . & . & . & 35 \\ 33 & . & . & . & 64 & 14 & . & . & . & 64.1 & 5 & . & . & . & 64.1.2 & 36 & . & . & . & 64.1 & 3 \end{array}$$

où les deux moitiés sont toujours cohérentes. Maintenant, on n'a qu'à prendre une telle bisection à volonté, & transformer les deux moitiés semblablement, jusqu'à ce qu'elles redeviennent cohérentes. Ainsi, prenons la moitié 3 34 dont le bout 34 communiquant a 7 donne la transformée 3 7. 34 . . . 8, & par renversement 8 . . . 34. 7 . . . 3, dont le bout 3 communiquant à 24 donne

$$8 24.3 7.34 25,$$

& l'autre moitié fera

$$40 56.35 39.2.1.64.1 . . 57,$$

qui

qui sont cohérentes par leurs bouts 25, 40, & 8, 57. Nous pourrions donc représenter en sorte cette nouvelle route:

1. 2. 39 35.56 40.25 32,
33.34.7 3.24 8.57 64.

29. La même moitié 3 34, puisque le premier bout 3 communique à 24, donne par la transformation:

23 3.24 34,

& 34 communiquant à 7 donne

23 7.34 24.3 6,

& l'autre moitié sera

55 39.2.1.64 . . . 56.35 38,

qui est cohérente. Par conséquent nous aurons une route représentée par ces deux moitiés:

1. 2. 39 55.6 3.24 32,
33.34.7 23.38 35.56 64.

La moitié 4 35, à cause de la communication du bout 35 avec 18, donne

4 18.35 19,

qui est déjà cohérente avec

36 50.3 . . . 1.64 . . . 51,

d'où nous tirons cette route:

1 . . . 3.50 36.19 32
33 . . 35.18 4.51 64,

& d'autres transformations de la même moitié donnent

1 . . . 3.50 . . . 43.16.19 . . . 21.10 . . . 5.24 . . . 32
33 . . . 35.18 . . . 11.4.51 . . . 55.42 . . . 47.56 . . . 64.



30. Voilà donc 4 autres routes, qui ont la même propriété que celle du §. 27.

50	59	22	7	48	31	10	33
23	6	49	58	9	34	47	30
60	51	8	21	46	11	32	35
5	24	45	52	57	36	29	12
44	61	4	25	20	13	56	37
3	64	43	14	53	40	19	28
62	15	2	41	26	17	38	55
1	42	63	16	39	54	27	18

42	59	6	55	44	31	18	33
5	54	43	58	19	34	45	30
60	41	56	7	46	17	32	35
53	4	47	40	57	20	29	16
48	61	52	25	8	15	36	21
3	64	49	14	39	24	9	28
62	13	2	51	26	11	22	37
1	50	63	12	23	38	27	10

40	59	12	35	38	31	54	33
13	18	39	58	55	34	37	30
60	41	56	11	36	53	32	47
17	14	19	42	57	48	29	52
20	61	16	25	10	51	46	49
15	64	21	4	43	24	9	28
62	5	2	23	26	7	50	45
1	22	63	6	3	44	27	8

40	59	50	35	38	31	48	33
51	12	39	58	49	34	37	30
60	41	56	11	36	47	32	21
55	52	13	4	2	57	22	29
14	01	54	25	10	45	20	23
53	64	15	4	43	24	9	28
62	5	2	17	26	7	44	19
1	16	63	6	3	18	27	8

31. A cette condition des cases opposées on peut encore ajouter celle-ci, que la première moitié des nombres 1 32 rem-



remplisse seule la moitié du carré, en partageant le carré par une ligne parallèle à un côté

							33
1	a	b	28	7	14	19	16
24	27	8	c	20	17	6	13
9	2	25	22	11	4	15	18
26	23	10	3	d	21	12	5

en sorte que les nombres 1 32 se trouvent tous au dessous de la ligne *αβ*, & les autres 33 64 au dessus. Il faut donc que l'unité se trouve près de la ligne *αβ*, afin qu'elle puisse communiquer avec le nombre 64 qui se trouve au dessus.

31. Commençons donc par mettre l'unité à une telle case quelconque, & en vertu de l'opposition la case du nombre 33 sera aussi déterminée: & il faudra faire en sorte qu'elle communique avec celle qui contiendra le nombre 32 au dessous de la ligne *αβ*. En essayant une telle disposition je suis parvenu jusqu'au nombre 28, & j'ai écrit dans les cases vuides les lettres *a, b, c, d*, pour l'arrangement desquelles je fais les transformations suivantes. La suite 1 28, puisque 28 aboutit à 27, 25, 11, 17, donne ces transformées:

I. 1 25. 28 26;

II. 1 11. 28 13;

& III. 1 17. 28 18;

dont aucune ne s'étend à une des cases vuides. Mais après plusieurs transformations on parvient à celle-ci, qui comprend toutes les cases,

1 8. 23 21. 18 20. *b*. 24 28. 17 9. *a, c, d*.



qui se transforme enfin en celle-ci :

1 8.23 . . 21.18 . . 20.6.24 . . 28.17 . . 15.2.9 . . . 14,
dont la fin 14 communique avec le commencement 33 de l'autre moi-
tié au dessus de la ligne $\alpha 6$: & la fin de celle-ci 64 communiquera
d'elle-même avec la case 1.

33. Voici donc cette route représentée en son entier

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	24	3	24	11	30	5

& il est non seulement aisé d'en trouver par la même méthode plusieurs autres, mais on peut aussi transformer celle-ci en plusieurs manières dont voici quelques unes :

7 1.8 32

7 1.8 25.32 26

15 . . . 10.7 . . . 1.8.9.16 . . . 21.24 32.23.22,

qu'on peut encore renverser, de même que la primitive, en la représentant en sorte

32 1



34. Voilà donc encore quelques routes de cette espèce :

35	62	43	56	37	60	41	50
44	55	36	61	42	49	38	59
63	34	53	46	57	40	51	48
54	45	64	33	52	47	58	39
7	26	15	20	1	32	13	22
16	19	8	25	14	21	2	31
27	6	17	10	29	4	23	12
18	9	28	5	24	11	30	3

35	60	43	56	37	62	41	50
44	51	36	61	42	49	38	63
59	34	53	46	17	40	51	48
54	45	58	33	52	47	64	19
7	22	15	20	1	26	13	22
16	9	8	25	14	21	2	31
11	6	17	10	29	4	23	12
18	5	30	5	24	11	28	3

41	60	37	54	43	58	47	50
36	63	12	59	38	49	44	57
61	40	13	34	55	46	11	48
64	35	62	29	52	31	56	45
12	24	1	20	7	30	3	32
16	19	14	23	2	21	8	29
25	2	17	6	27	10	31	4
18	15	26	11	22	5	28	9

62	37	56	41	50	35	54	47
17	42	61	36	55	18	51	34
58	63	44	59	40	53	46	49
43	58	59	64	45	50	33	52
20	1	18	13	32	7	26	11
17	14	21	8	27	12	31	6
2	19	16	25	4	29	0	23
15	22	3	28	9	24	5	30

35. Jusqu'ici j'ai considéré la question telle qu'elle avoit été proposée pour l'échiquier ordinaire divisé en 64 cases. Or comme ce nombre est trop grand, pour qu'on puisse concevoir toutes les variétés qui y peuvent avoir lieu, il sera bon de considérer aussi quelques figures plus simples, qui contiennent un moindre nombre de cases que le cavalier d'échec doit parcourir. Or d'abord il est évident, que, ni un carré de 4, ni un de 9 cases n'y est propre : mais on verra

V v z

qu'on



qu'on ne sauroit réussir non plus dans un carré de 16 cases. Car, de quelque manière qu'on s'y prenne, il restera toujours une case angulaire vuide; & on s'appercvra bientôt, que toutes les transformations qu'on puisse faire, ne sont pas capables de la remplir. Il est clair qu'on devroit commencer, & finir par un coin: & partant deux des quatre cases du milieu seront d'abord remplies, & les deux autres devroient être gardées jusqu'à la fin, ce qui ne se peut pas.

1	8	3	10
14	11	4	7
5	2	9	12
15	6	13	3

36. Le premier carré donc que le cavalier puisse parcourir est celui de 25 cases, qu'on pourra remplir moyennant les mêmes règles, en cas qu'on ne réussisse point au premier essai. Or la marche du cavalier produit toujours

7	12	1	22	5
18	23	7	11	16
13	8	25	4	21
24	19	2	15	10
14	9	20	3	

cette propriété, que les nombres pairs & impairs se suivent alternativement, comme on peut voir par toutes les figures rapportées jusqu'ici. D'où il est évident, que la dernière case contenant 25 ne sauroit jamais communiquer avec la première 1: & partant il est impossible de trouver une route rentrante en elle-même dans le carré de 25, ni dans aucune autre figure, qui contient un nombre impair de cases. On comprend de là aussi, qu'on ne sauroit jamais commencer par une case qui contient un nombre pair; car, de quelque manière qu'on transforme cette route, les nombres pairs tomberont toujours dans les mêmes cases, & les cases angulaires contiendront des nombres impairs. Dans ce carré de 25 il est aussi clair, qu'il faut absolument ou commencer ou finir par une case angulaire.

37. Mais voyons aussi les transformations, qu'on peut tirer de cette route 1 25 trouvée du carré de 25 cases.

Or

Or la dernière communiquant aux cases 27, 10, 16, 22, 12, 18, 24, 14, fournit ces transformées:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| I. 1 . . . 20.25 . . . 21; | II. 1 . . . 10.25 . . . 11; |
| III. 1 . . . 16.25 . . . 17; | IV. 1 . . . 22.25 . . . 23; |
| V. 1 . . . 12.25 . . . 13; | VI. 1 . . . 18.25 . . . 19; |
| VII. 1 25; | VIII. 1 . . . 14.25 . . . 15. |

Donc, commençant par la case angulaire, on peut finir par quelqueune de ces cases 21, 11, 17, 23, 13, 19, 25, 15. Mais la première donne encore ces transformées,

- a. 1 . . 6.21 . . 25.20 . . 7; b. 1.2.21 . . . 25.20 . . . 3,

& les autres celle-ci:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| c. 1.2.11 . . 25.10 . . 3; | d. 1 . . 8.11 . . 25.10.9, |
| e. 1 . . 4.17 . . 25.16 . . 5; | f. 1 . . 8.17 . . 25.16 . . 9, |
| g. 1 . . 4.23 . . 25.22 . . 4; | h. 1.2.23 . . 25.22 . . . 3, |
| i. 1 . . 6.13 . . 25.12 . . 7; | k. 1.2.13 . . 25.12 . . . 3, |
| l. 1 . . 6.19 . . 25.18 . . 7; | m. 1 . . 4.19 . . 25.18 . . 5, |
| n. 1 . . 6.15 . . 25.14 . . 7; | o. 1 . . 8.15 . . 25.14 . . 9, |

où les dernières cases sont 3, 5, 7, 9.

38. Puisque les cases angulaires 3, 5, 7, ne communiquent qu'à deux autres, elles ne fournissent point par notre méthode de nouvelles transformées. Considérons donc celles qui finissent par 9, & nous tirerons ces transformées,

- | | |
|--|-----------------------------------|
| p. 1 . . 4.9.10.25 . . 11.8 . . 5; | q. 1 . . 8.11 . . 24.9.10.25, |
| r. 1 . . 4.9 . . 16.25 . . 17.8 . . 5; | s. 1 . . 8.17 . . 24.9 . . 16.25, |
| t. 1 . . 4.9 . . 14.25 . . 15.8 . . 5; | u. 1 . . 8.15 . . 24.9 . . 14.25. |

Maintenant ces nouvelles routes qui finissent par 25, nous conduisent à d'autres transformées: & nous parviendrons à plusieurs autres



routes qui finissent par quelqu'une des cases qui sont marquées des nombres impairs: d'où l'on voit qu'en commençant par la case angulaire 1, on peut finir par quelque case marquée d'un nombre impair qu'on voudra; & cela en plusieurs manieres différentes. Ensuite, chaque route pouvant être renversée, le nombre de toutes les routes possibles deviendra extrêmement grand.

39. Ici on peut encore ajouter cette condition, que les nombres qui se trouvent en deux cases opposées, fassent partout la même somme, savoir 26. Il faut donc que la première & dernière cases se trouvent en des angles opposés; & pour trouver une telle route, on n'a qu'à commencer à remplir le quarré, & mettre à l'opposi-

23	18	5	10	25
6	11	24	19	14
17	22	13	4	9
12	7	21	15	20
1	16	21	8	3

de chaque nombre son complément à 26; & continuer aussi loin qu'on pourra. Mais, puisqu'on sait que la case du milieu doit contenir 13, on ne sauroit presque manquer: & alors, en conservant la même propriété, on en peut tirer plusieurs formes différentes: dont voici quelques unes.

- I. 1 4. 11 . . . 5. 14. 13. 13. 21 . . . 15. 22 . . . 25,
 II. 1 4. 7 . . 5. 14. . 18. 13. 8 . . 12. 21 . . 19. 22 . . . 25,
 III. 1 4. 21 14. 13. 13 5. 22 . . . 25,
 IV. 1 5. 14 20. 13. 6 12. 21 . . . 25,
 V. 1 . . 4. 11. 12. 21 . . 16. 13. 10 5. 14. 22 . . . 25,
 VI. 1 . . 4. 7 . . . 12. 21. 20. 13 6. 5. 14 . . . 19. 22 . . . 25,
 VII. 1 . . 4. 21. 12 6. 13. 20 14 5. 22 . . . 25.

40. Dans toutes ces variations, tant les quatre premiers nombres 1 . . . 4, que les quatre derniers 22 . . . 25, avec celui du milieu 13, demeurent invariables, de sorte que les variations ne s'étendent que sur les autres. D'où il semble aussi, que la route trouvée

avec

avec les 7 variations épuisent entièrement cette espèce: voici donc toutes ces 8 routes représentées à la fois.

23 18 5 10 25 6 11 24 19 14 17 22 13 4 9 12 7 2 15 20 1 16 21 8 3	23 18 11 6 25 10 5 24 17 12 19 22 13 4 7 14 9 2 21 16 1 20 15 8 3	23 12 7 16 25 6 17 24 21 8 11 22 13 4 15 18 5 2 9 20 1 10 19 14 3	23 8 21 16 25 20 15 24 7 12 9 22 13 4 17 14 19 2 11 6 1 10 5 18 3
23 10 19 14 25 18 5 24 9 20 11 22 13 4 15 6 17 2 21 8 1 12 7 16 3	23 20 15 8 25 14 9 24 21 16 19 22 13 4 7 10 5 2 17 12 1 18 11 6 3	23 16 21 8 25 12 7 24 15 20 17 22 13 4 9 6 11 2 19 14 1 18 5 10 3	23 10 5 18 25 14 19 24 11 6 9 22 13 4 17 20 15 2 7 12 1 8 21 16 3

41. Les routes trouvées ci-dessus pour un carré de 25 cases se peuvent ainsi disposer qu'elles remplissent un carré de 100 cases, en sorte que la route devienne rentrante en elle-même. Voici un tel carré de 100 cases.

30	41	46	37	32	51	60	67	72	55
47	36	31	40	45	68	73	54	61	66
42	29	28	33	50	59	52	63	56	71
35	48	27	44	39	74	69	58	65	62
28	43	34	49	26	51	64	75	70	57
7	20	25	14	1	76	99	84	93	78
12	15	8	19	24	89	94	77	58	85
21	6	13	2	9	100	83	88	79	92
16	11	4	23	18	95	90	81	86	97
5	22	17	10	3	82	87	96	91	80

où les nombres sont disposés en quatre quartiers, dont chacun contient la même route.



42. Avant que de finir, j'ajouterai encore quelques autres figures, & parmi les rectangulaires, la plus simple que le cavalier puisse parcourir, est de 12 cases, la largeur contenant 3, & la longueur 4, dont voici quelques routes:

10	7	2	5
1	4	9	12
8	11	6	3

3	6	11	8
12	9	2	5
1	4	7	10

3	6	9	12
8	11	2	5
1	4	7	10

12	9	6	3
1	4	11	8
10	7	2	5

Mais on voit aisément, que des routes rentrantes ne sauroient ici avoir lieu. Si la largeur contient trois cases, & la longueur 5 ou 6, il est impossible de les parcourir: mais, donnant à la longueur 7 ou plusieurs cases, on pourra réussir, pourtant sans rentrer:

3	8	5	18	15	10	13
6	19	2	9	12	21	16
1	4	7	20	17	14	11

15	18	21	2	5	8	11
20	1	16	13	10	3	6
17	14	19	4	7	12	9

Or, si nous donnons 4 cases à la largeur, & 5 ou plusieurs à la longueur, on aura ces routes:

14	7	20	3	16
19	2	15	8	11
6	13	10	17	4
1	18	5	12	9

16	7	22	3	18	11
23	2	17	12	21	4
8	15	6	19	10	13
1	24	9	14	5	20

20	7	26	13	18	5	24
27	14	19	6	25	12	17
8	21	2	15	10	23	4
1	28	9	22	3	16	11

43. Jusqu'ici les routes rentrantes en elles-mêmes ne peuvent pas avoir lieu; mais, donnant 5 cases à la largeur, & 6 à la longueur, on pourra aussi remplir cette condition, de même que dans tous les autres rectangles, dont le nombre des cases est pair, pourvu qu'il n'y ait pas moins de 5 cases dans un côté. En voici des exemples:

3	20	13	24	5	18
12	29	4	19	14	25
21	2	23	8	17	6
28	11	30	15	26	9
1	22	27	10	7	16

30	21	6	15	28	19
7	16	29	20	5	14
22	31	8	35	18	27
9	36	17	26	13	4
32	23	2	11	34	25
1	10	33	24	3	12



où cette autre figure est un carré de 36 cases, & la route est non seulement rentrante en elle-même, mais les nombres dans les cases opposées ont partout la même différence de 18.

44. Mais, sans se borner aux figures rectangulaires, on peut former à volonté quantité d'autres figures, où le cavalier peut passer par toutes les cases: dont j'ajouterai quelques unes, qui sont plus simples, & qui admettent même des routes rentrantes en elles-mêmes.

	10	7	
12	3	2	9
3	8	11	6
	1	4	

		14	19	
		7	12	
6	13	20	15	18
1	8	5	10	3
		2	17	
		9	4	

		1	14	7	22	
13	8	21	32	13	24	
2	31	26	23	6	19	
9	16	29	20	25	12	
30	3	10	27	18	5	
	28	17	4	11		

		1	20	7	26	
21	8	27	32	19	14	
2	29	12	15	6	25	
9	22	31	10	13	18	
30	3	16	17	24	5	
	10	23	4	7		

